

CORRECTION TD - E3

EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Solution d'un oscillateur harmonique



6434

1) Forme générale de la solution :

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = 0 = A$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = G_0 = \omega_0 B \Rightarrow B = \frac{G_0}{\omega_0}$$

Bilan :

$$f(t) = \frac{G_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

2) Forme générale de la solution :

$$f(t) = F_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = 0 = F_0 + A \Rightarrow A = -F_0$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = 0 = \omega_0 B \Rightarrow B = 0$$

Bilan :

$$f(t) = F_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]$$

3) Forme générale de la solution :

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = F_1 = A \Rightarrow A = F_1$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = 0 = \omega_0 B \Rightarrow B = 0$$

Bilan :

$$f(t) = F_1 \cos(\omega_0 t)$$

Ex. n°2 • Solution d'un oscillateur amorti



7433

1) Forme générale de la solution :

$$f(t) = e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = 0 = A$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = G_0 = \Omega B \Rightarrow B = \frac{G_0}{\Omega}$$

Bilan :

$$f(t) = \frac{G_0}{\Omega} e^{-\lambda t} \sin(\Omega t)$$

2) Forme générale de la solution :

$$f(t) = F_0 + e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = 0 = F_0 + A \Rightarrow A = -F_0$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = 0 = -\lambda A + \Omega B \Rightarrow B = -\frac{\lambda F_0}{\Omega}$$

Bilan :

$$f(t) = F_0 - F_0 e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]$$

3) Forme générale de la solution :

$$f(t) = e^{-\lambda t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)]$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = F_1 = A$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = 0 = -\lambda A + \Omega B \Rightarrow B = \frac{\lambda F_1}{\Omega}$$

Bilan :

$$f(t) = F_1 e^{-\lambda t} \left[\text{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \text{sh}(\Omega t) \right]$$

4) Forme générale de la solution :

$$f(t) = F_0 + (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$$

Condition initiale :

$$f(0^+) = 0 = F_0 + A \Rightarrow A = -F_0$$

Condition initiale sur la dérivée :

$$\dot{f}(0^+) = 0 = -\omega_0 A + B \Rightarrow B = -\omega_0 F_0$$

Bilan :

$$f(t) = F_0 - F_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$$

Ex. n°3 • Circuit LC en régime libre



5029

1) La loi des mailles (pour $t > 0$) donne :

$$0 = u_C + u_L = u_C + L \frac{di}{dt} = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2) La solution de l'ED est :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Déterminons les conditions initiales. En $t = 0^-$, le circuit est dans un état stationnaire :

- le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : $i(0^-) = 0$
- la bobine est équivalente à un fil : $u_L(0^-) = 0$
- une loi des mailles donne :

$$E = u_C + u_L \Rightarrow u_C(0^-) = E$$

On a continuité de i et u_C en $t = 0$, donc :

$$u_C(0^+) = E \quad \text{et} \quad i(0^+) = C \dot{u}_C(0^+) \Rightarrow \dot{u}_C(0^+) = 0$$

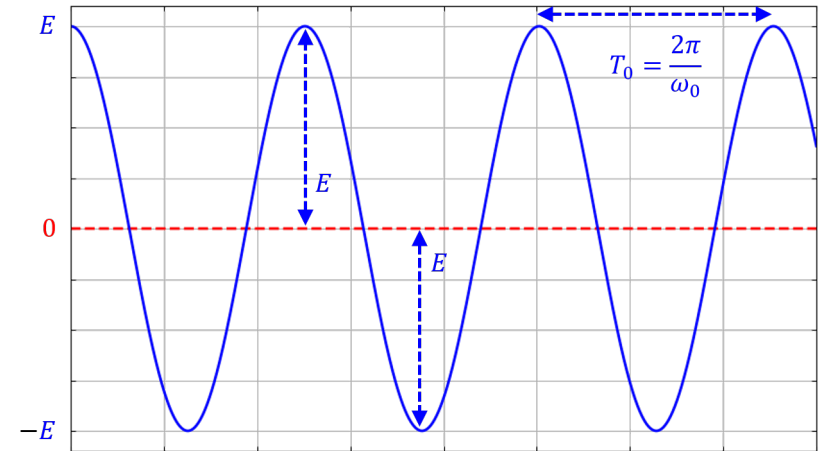
On en déduit alors les constantes A et B :

$$u_C(0^+) = E = A \quad \text{et} \quad \dot{u}_C(0^+) = 0 = \omega_0 B$$

Bilan :

$$u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

Graphes :



3) Effectuons un bilan de puissance. On prend la loi des mailles et multiplie par i .

$$0 = u_C + L \frac{di}{dt} \quad \times i \Rightarrow 0 = u_C C \frac{du_C}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

On posant $\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$ l'énergie emmagasinée par le circuit, on obtient :

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} = 0$$

Puisque sa dérivée est nulle, $\mathcal{E}_{tot}$ est bien une fonction constante, égale à sa valeur initiale.

$$\mathcal{E}_{tot}(t) = \mathcal{E}_{tot}(0) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0) + \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}CE^2$$

Ex. n°4 • Circuit RLC en régime libre

☆☆☆ 1315

1) La loi des mailles (pour $t > 0$) donne :

$$0 = u_R + u_C + u_L = Ri + u_C + L \frac{di}{dt} = RC \frac{du_C}{dt} + u_C + LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

On divise par LC :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

2) La solution de l'ED est :

$$u_C(t) = e^{-\lambda t} \left[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right]$$

Déterminons les conditions initiales. En $t = 0^-$, le circuit est dans un état stationnaire :

- le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : $i(0^-) = 0$
- loi d'Ohm : $u_R(0^-) = 0$
- la bobine est équivalente à un fil : $u_L(0^-) = 0$
- une loi des mailles donne :

$$E = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u_C(0^-) = E$$

On a continuité de i et u_C en $t = 0$, donc :

$$u_C(0^+) = E \quad \text{et} \quad i(0^+) = C \dot{u}_C(0^+) \Rightarrow \dot{u}_C(0^+) = 0$$

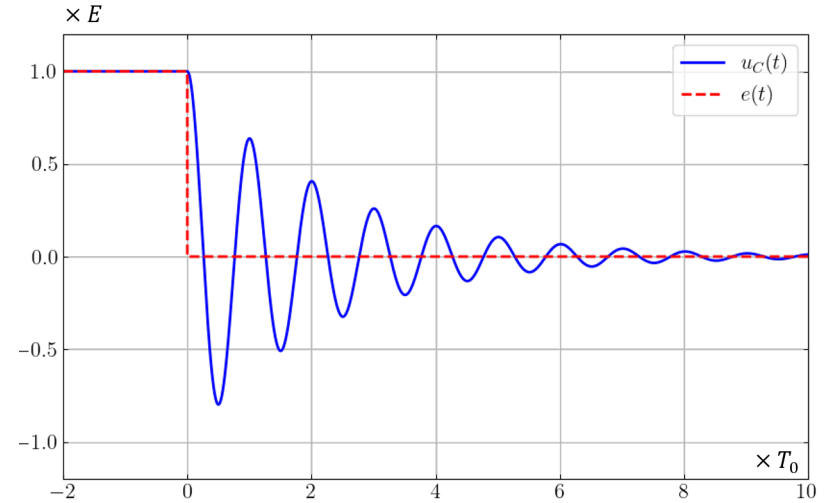
On en déduit alors les constantes A et B :

$$u_C(0^+) = E = A \quad \text{et} \quad \dot{u}_C(0^+) = 0 = -\lambda A + \Omega B \Rightarrow B = \frac{\lambda A}{\Omega} = \frac{\lambda E}{\Omega}$$

Bilan :

$$u_C(t) = E e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]$$

Graphes :



3) Effectuons un bilan de puissance. On prend la loi des mailles et multiplie par i .

$$0 = u_R + u_C + L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow_i \quad 0 = Ri^2 + u_C C \frac{du_C}{dt} + Li \frac{di}{dt}$$

Ainsi,

$$0 = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

On en déduit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} = -Ri^2 < 0$$

Puisque sa dérivée est négative, $\mathcal{E}_{tot}$ est bien une fonction décroissante.

Ex. n°5 • Oscillateurs harmoniques

☆☆☆ 8058

1) Loi des mailles :

$$E = u_{L_1} + u_{L_2} + u = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + u = L_1 C \frac{d^2u}{dt^2} + L_2 C \frac{d^2u}{dt^2} + u$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{(L_1 + L_2)C} = \frac{E}{(L_1 + L_2)C}$$

Donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$$

2) Loi des mailles :

$$E = u_L + u = L \frac{di}{dt} + u$$

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$. Ainsi :

$$E = L \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + u = L \left(C_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + C_2 \frac{d^2 u}{dt^2} \right) + u$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{L(C_1 + C_2)} = \frac{E}{L(C_1 + C_2)}$$

Donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$$

Ex. n°6 • Circuit RLC en dérivation



2848

1) En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil électrique. Elle va donc court-circuiter les deux autres composants : l'intégralité de l'intensité passe par sa branche. On en déduit que i_L est la courbe (1).

La tension aux bornes du condensateur u (qui est la même que celle aux bornes de la résistance) est continue. Or, $u = R i_R$, donc i_R est également continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (3).

Finalement, i_C est la courbe (2).

2) Loi des nœuds : $i_0 = i_R + i_C + i_L$.

De plus, on a les relations courant/tension pour chaque dipôle :

$$u = R i_R \quad u = L \frac{di_L}{dt} \quad i_C = C \frac{du}{dt}$$

Ainsi :

$$i_0 = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} + i_L \Rightarrow i_0 = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{i_0}{LC}$$

3) Sous forme canonique l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \omega_0^2 i_0$$

On en déduit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \Rightarrow Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Le régime pseudo-périodique est défini par :

$$Q > \frac{1}{2} \Rightarrow C > \frac{L}{4R^2} = 0,25 \text{ nF}$$

4) D'après le graphe, on est en régime pseudo-périodique. Ainsi, la solution générale est :

$$i_L(t) = e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + i_0$$

Or, les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} i_L(0^+) = 0 = A + i_0 & \Rightarrow A = -i_0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{u(0^+)}{L} = 0 = -\lambda A + \Omega B & \Rightarrow B = -\frac{\lambda i_0}{\Omega} \end{cases}$$

Ainsi,

$$i_L(t) = i_0 - i_0 e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]$$

5) On sait que la valeur de Q est du même ordre de grandeur que le nombre d'oscillations visibles. On voit clairement 8 oscillations (le graphique ne montre pas les suivantes), on en déduit $Q > 8$. Or, on veut montrer que :

$$\Omega \simeq \omega_0 \Leftrightarrow \omega_0 \gg \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \Leftrightarrow Q \gg \frac{1}{2}$$

Ce qui est bien le cas ici !

6) On lit graphiquement : $8T = 5 \text{ ms}$, donc $T \simeq 0,625 \text{ ms}$

On sait enfin que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \simeq 100 \text{ nF}} \Rightarrow \boxed{Q = 10}$$

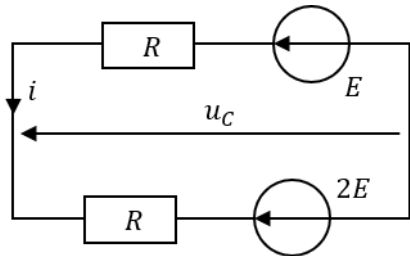
POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°7 • Conditions initiales d'un OH

★★★

2360

1) Voici le schéma équivalent simplifié en régime stationnaire (interrupteur en position 1).



Loi des mailles :

$$E - Ri - Ri - 2E = 0 \Rightarrow \boxed{i(0^-) = -\frac{E}{2R}}$$

On en déduit :

$$u_C = E - Ri \Rightarrow \boxed{u_C(0^-) = \frac{3E}{2}}$$

2) Une fois l'interrupteur placé en position 2, les branches contenant des générateurs sont déconnectées et on a un simple dipôle LC. Il s'agit donc du cas d'un circuit LC en régime libre.

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

On pose : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La solution de l'ED est de la forme :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

On utilise la continuité de i et u_C :

$$\begin{aligned} u_C(0^+) &= \boxed{\frac{3E}{2} = A} \\ i(0^+) &= -\frac{E}{2R} = C \frac{du_C}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0^+) = -\frac{E}{2RC} = B\omega_0 \\ &\Rightarrow \boxed{B = -\frac{E}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{u_C(t) = \frac{3E}{2} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t) \right]}$$

Ex. n°8 • Circuit L(R||C)

★★★

0704

1) Loi des mailles : $E = u_L + u$.

Loi des nœuds : $i_L = i_R + i_C$.

On dérive cette expression :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} \Rightarrow \frac{u_L}{L} = \frac{\dot{u}}{R} + C \ddot{u} \Rightarrow \frac{E - u}{L} = \frac{\dot{u}}{R} + C \ddot{u}$$

On met l'ED sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{RC} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}}$$

On identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0,1 < \frac{1}{2}}$$

2) La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc u est continue : $u(0^-) = u(0^+) = 0$. Ceci implique que $i_R(0^+) = 0$ d'après la loi d'Ohm.

L'intensité à travers une bobine est continue : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$. Ainsi,

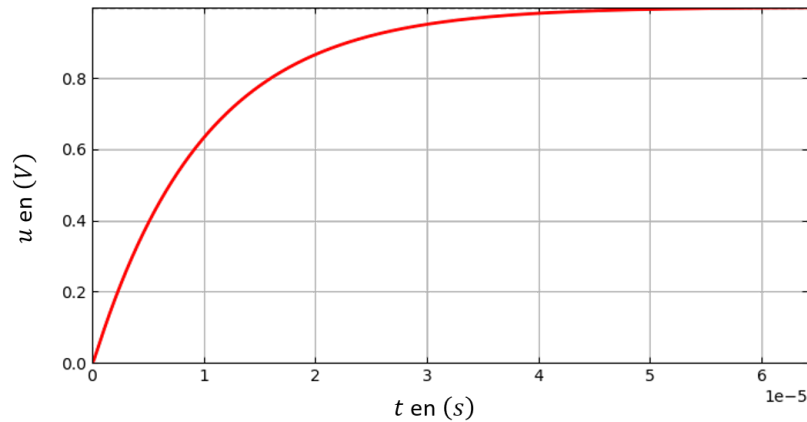
$$i_L = i_R + i_C \Rightarrow \boxed{i_C(0^+) = 0 = C \dot{u}(0^+)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\lambda t} \left[A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t) \right] + E \\ u(0^+) &= A + E = 0 & \Rightarrow A &= -E \\ \dot{u}(0^+) &= B\Omega - \lambda A = 0 & \Rightarrow B &= \frac{\lambda A}{\Omega} = -\frac{\lambda E}{\Omega} \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$u(t) = E \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\operatorname{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \operatorname{sh}(\Omega t) \right) \right]$$



3) On est dans un régime pseudo-périodique si $Q > 1/2$. Ainsi :

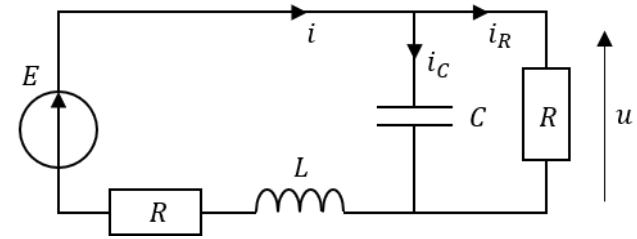
$$R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = 500 \, \Omega$$

Ex. n°9 • Circuit RL(R||C)



8282

1) Cf. schéma ci-dessous pour les notations.



En $t = 0^-$, toutes les grandeurs sont nulles.

$$i(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0$$

Les grandeurs continues en $t = 0$ sont : u et i .

$$i(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad u(0^+) = 0$$

La loi des mailles donne :

$$E = u + Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$$

Pour $t \rightarrow \infty$, un nouveau régime permanent est atteint. Le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil. On a donc :

$$i(+\infty) = i_\infty = \frac{E}{2R}$$

2) Il faut $Q > 1/2$.

3) On a :

$$i(t) = i_\infty + e^{-\lambda t} \left[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right]$$

Avec les conditions initiales :

$$i(0^+) = 0 = i_\infty + A \Rightarrow A = -\frac{E}{2R}$$

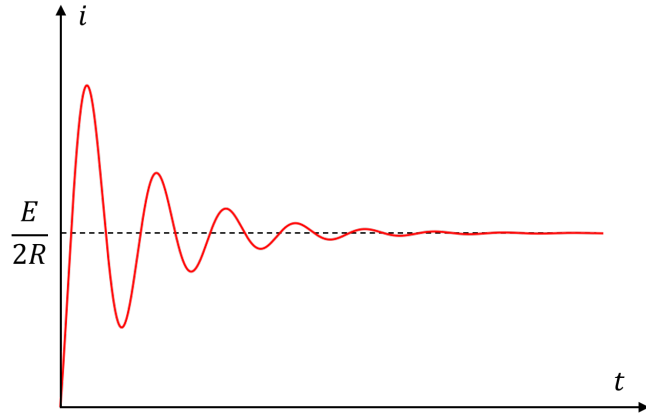
Et,

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} = -\lambda A + \Omega B \Rightarrow B = \frac{E}{L\Omega} - \frac{\lambda E}{2R\Omega}$$

On en déduit :

$$i(t) = \frac{E}{2R} + e^{-\lambda t} \left[-\frac{E}{2R} \cos(\Omega t) + \left(\frac{E}{L\Omega} - \frac{\lambda E}{2R\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right]$$

4) Graphe de $i(t)$.



5) On part de la loi des mailles :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + R \left(i - C \frac{du}{dt} \right) \quad \leftarrow u = Ri_R \quad \text{et} \quad i_R = i - i_C$$

$$E = 2Ri + L \frac{di}{dt} + RC \left(R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} \right) \quad \leftarrow u = E - Ri - L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i = \frac{E}{LRC}$$

On a donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \omega_0 \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right)^{-1}$$

On peut également passer par la notation complexe pour démontrer cette équation différentielle (cf. chapitre E4). On pose l'impédance équivalente totale du circuit :

$$\underline{Z}_{eq} = R + j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1} = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Ainsi,

$$\underline{e} = \underline{Z}_{eq} \times \underline{i}$$

On remplace $\underline{Z}_{eq}$ par son expression et on multiplie chaque membre de l'égalité par

$$1 + j\omega RC.$$

$$(1 + j\omega RC) \underline{e} = \left(R + j\omega R^2 C + j\omega L + (j\omega)^2 RCL + R \right) \underline{i}$$

Finalement, on repasse en réel.

$$E = 2Ri + R^2 C \frac{di}{dt} + L \frac{di_L}{dt} + RLC \frac{d^2i}{dt^2}$$

Donc, sous forme canonique :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i = \frac{E}{LRC}$$

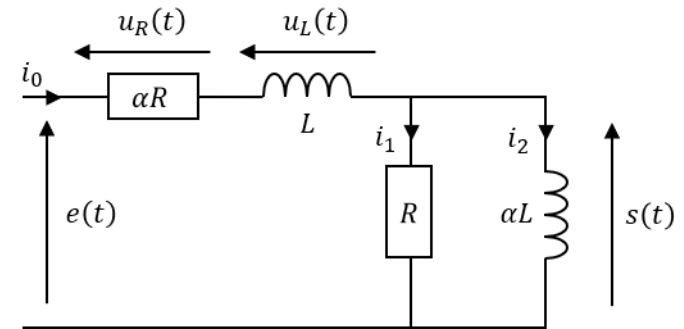
POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°10 • Circuit RL(RL) paramétrable

★★★

0875

1) Notations :



On écrit la loi des mailles, que l'on dérive puisque l'on doit faire apparaître la dérivée de la tension d'entrée.

$$e = \alpha R i_0 + L \frac{di_0}{dt} + s \quad \Rightarrow \quad \frac{de}{dt} = \alpha R \frac{di_0}{dt} + L \frac{d^2i_0}{dt^2} + \frac{ds}{dt}$$

On remarque que $s(t)$ est la tension aux bornes de la résistance et de la bobine. On a donc :

$$s = Ri_1 = \alpha L \frac{di_2}{dt}$$

On écrit la loi des nœuds, que l'on dérive pour pouvoir utiliser les deux relation de $s(t)$ précédentes

$$i_0 = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_0}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\alpha L}$$

On injecte cette expression dans la loi des mailles :

$$e = \alpha R i_0 + L \frac{di_0}{dt} + s \quad \Rightarrow \quad \frac{de}{dt} = \alpha R \left(\frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\alpha L} \right) + L \left(\frac{1}{R} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{\alpha L} \frac{ds}{dt} \right) + \frac{ds}{dt}$$

On regroupe les termes.

$$\frac{de}{dt} = \frac{L}{R} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{L}{R} s(t)$$

On divise par $\frac{L}{R}$ et on retrouve bien la forme demandée.

2) On rappelle la forme canonique :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = g(t)$$

On a donc :

$\omega_0 = \frac{R}{L}$

et

$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$

$\Rightarrow$

$Q = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}}$

3) Notons : $f(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}$

Ainsi,

$$Q = \frac{1}{f(\alpha)} \quad \text{et} \quad f'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Étudions les variations de $f(\alpha)$ pour en déduire celles de Q .

α	0		1		2
$f'(\alpha)$		< 0		> 0	
$f(\alpha)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$7/2$
$Q(\alpha)$	0^+	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	$2/7$

Le facteur de qualité par de 0 lorsque $\alpha = 0$, atteint sa valeur maximale de $1/3$ pour $\alpha = 1$ puis diminue pour atteindre $2/7$ lorsque $\alpha = 2$. Donc : $Q \in [0; 1/3]$

4) En $t = 0^-$, on et dans un régime stationnaire.

- Bobine = fil électrique : $u_L(0^-) = s(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_L + s \quad \Rightarrow \quad u_R(0^-) = 0$
- Loi d’Ohm : $i_0(0^-) = i_2(0^-) = 0$
- Loi des nœuds : $i_1(0^-) = 0$

On utilise la continuité des intensités à travers les bobines.

- Continuité : $i_0(0^+) = i_2(0^+) = 0$
- Loi des nœuds : $i_1(0^+) = 0$
- Loi d’Ohm : $u_R(0^+) = s(0^+) = 0$
- Loi des mailles : $\frac{E}{E} = u_R + u_L + s \quad \Rightarrow \quad u_L(0^+) =$

5) Avec les relations déterminées précédemment :

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{di_1}{dt} = R \left(\frac{di_0}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) = R \left(\frac{u_L}{L} - \frac{s}{\alpha L} \right)$$

On applique cette relation en $t = 0^+$

$$\dot{s}(0^+) = \frac{RE}{L}$$

6) Pour $t > 0$, le signal $e(t)$ est constant. Ainsi, l’ED devient :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

On est nécessairement en régime apériodique car $Q < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

La forme générale de la solution est :

$$s(t) = e^{-\lambda t} \left[A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t) \right]$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} s(0^+) = A = 0 \\ \dot{s}(0^+) = -\lambda A + \Omega B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{RE}{\Omega L} \end{cases}$$

Ainsi,

$$s(t) = \frac{RE}{\Omega L} e^{-\lambda t} \operatorname{sh}(\Omega t)$$

7) Pour le tracé, faire attention à : la fonction est nulle en 0^+ , la dérivée est positive en 0^+ et aucune oscillation.

Graphe :

